Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con $k > 0$.

   a) **[1,25 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

   b) **[1,25 puntos]** Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) Sean x, y, z las variables que representan el número de helados de una, dos y tres bolas vendidos, respectivamente. De las ventas del viernes obtenemos estas dos ecuaciones: $x + y + z = 157$; $x + 2y + 3z = 278$. De la última condición obtenemos la ecuación $x = kz$, con $k > 0$. Por tanto, el sistema de ecuaciones que se plantea es:

$$\begin{cases} x + y + z = 157 \\ x + 2y + 3z = 278 \\ x - kz = 0 \end{cases}$$

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Definir las incógnitas del problema, 0,25 puntos; plantear la primera ecuación, 0,25; plantear la segunda ecuación, 0,25 puntos; plantear la tercera ecuación, 0,5 puntos.

b) Estudiamos el sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}$. Tenemos que $|M| = -2k + 3 + 0 - 2 + k + 0 = -k + 1$. Por tanto, este determinante solamente se anula cuando $k = 1 > 0$. Por tanto, cuando $k \neq 1$ el rango de M es 3 y el sistema es compatible determinado (y tiene una única solución).

Para el caso $k = 1$, el rango de la matriz de coeficientes M es 2 y el de la matriz ampliada M^* es 3. Esto se puede comprobar tomando, por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 278 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$. Por tanto, en este caso tenemos un sistema incompatible.

Con respecto a la pregunta que se hace, el caso en el que se venden el mismo número de helados de una bola que de tres bolas se corresponde con $k = 1$. Por tanto, este caso no se corresponde con ningún caso en los que el sistema tiene solución única.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Cálculo del determinante de M y de los valores en los que se anula, 0,25 puntos; discusión razonada del caso $k \neq 1$, 0,25 puntos; estudiar los rangos en el caso $k = 1$, 0,25 puntos; discusión razonada del caso $k = 1$, 0,25 puntos; respuesta razonada a la cuestión planteada, 0,25 puntos. Si se equivoca al calcular el determinante, no tenerlo en cuenta y valorar el resto.

2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & x < 3 \\ \frac{2x}{x-4} & x \geq 3 \end{cases}$.

   a) **[1,5 puntos]** Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

   b) **[1 punto]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

   Solución:

   a) La función es continua cuando $x < 3$ porque es un polinomio. También es continua cuando $x > 3$ (salvo tal vez en $x = 4$) por tratarse de un cociente de polinomios tales que el denominador solo se anula en $x = 4$. Por tanto, tendremos que estudiar la continuidad en $x = 3$ y en $x = 4$.

   Para el caso $x = 3$ tenemos: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 16$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -6$; $f(3) = 16$. Por tanto, la función no es continua en $x = 3$ y tiene una discontinuidad de salto finito.

   Para el caso $x = 4$ tenemos: $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $f(4)$ no está definido. Por tanto, la función no es continua en $x = 4$ y tiene una discontinuidad de salto infinito.

   <u>**Criterios de corrección:**</u>

   - Decir dónde la función es continua y los dos posibles puntos de discontinuidad, 0,5 puntos; estudiar el caso $x = 3$, 0,25 puntos; indicar tipo de discontinuidad para $x = 3$, 0,25 puntos; estudiar el caso $x = 4$, 0,25 puntos; indicar tipo de discontinuidad para $x = 4$, 0,25 puntos.

   b) Cuando $x < 3$ la derivada de la función es $f'(x) = 2x + 2$. Además, $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9$ y $f'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 2$ es $y - 9 = 6(x - 2)$.

   <u>**Criterios de corrección:**</u>

   - Plantear la ecuación de la recta tangente, 0,25 puntos; cálculo de la derivada de $f(x)$, 0,25 puntos; evaluar $f'(2)$, 0,25 puntos; escribir la ecuación de la recta tangente que se pide, 0,25 puntos.

3. Se quiere instalar un toldo que pase por el punto de coordenadas $A(2,1,1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x \quad\quad - z = 1 \end{cases}$.

   a) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que define el toldo.

   b) **[1,25 puntos]** Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2,-2,1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

   Solución:

   a) La ecuación de la recta depende de un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomamos, por ejemplo, $z = \lambda$ y despejamos x e y para obtener las ecuaciones paramétricas de la recta y su vector director:

   $$x - z = 1 \to x = 1 + \lambda;\ 2x - y + z = 3 \to y = 2x + z - 3 = 2(1 + \lambda) + \lambda - 3 = -1 + 3\lambda.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\begin{cases} x = \ \ 1 + \ \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \ \ 0 + \ \lambda \end{cases}$$

Así, el vector director de la recta es el $\vec{u} = (1, 3, 1)$, que es también el vector normal del plano que se pide.

Por tanto, la ecuación del plano será $\pi_1 \equiv x + 3y + z = D$, con $D \in \mathbb{R}$. Como sabemos que el plano pasa por el punto $A(2,1,1)$ podemos calcular D: $1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = D = 6$. Finalmente, la ecuación del plano es $\pi_1 \equiv x + 3y + z = 6$.

Criterios de corrección:

- Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta, 0,5 puntos; determinar el vector normal del plano, 0,25 puntos; obtener el valor de D, 0,25 puntos; dar la ecuación correcta del plano, 0,25 puntos.

b) La distancia del punto F al plano π_1 viene dada por

$$d(F, \pi_1) = \frac{|1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{11}} = \frac{9\sqrt{11}}{11} \ unidades.$$

Criterios de corrección:

- Plantear la ecuación de la distancia de un punto a un plano, 0,5 puntos; calcular el numerador, 0,25; calcular el denominador, 0,25 puntos; dar el valor correcto de la distancia, 0,25 puntos.

4.

a) [**1 punto**] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{2x^2}{x^2+1} dx$.

b) [**1,5 puntos**] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante del producto de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

Solución:

a) La integral puede resolverse de la siguiente manera:

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{2x^2+2-2}{x^2+1} dx = \int \frac{2x^2+2}{x^2+1} dx + \int \frac{-2}{x^2+1} dx = 2\int dx - 2\int \frac{1}{x^2+1} dx = 2x - 2arctg(x) + C.$$

Criterios de corrección:

- Realizar el cociente, 0,25 puntos; resolver la primera integral, 0,25 puntos; resolver la segunda integral, 0,25 puntos; dar el valor final de la integral, 0,25 puntos.

b) Tenemos que $|A| = a$ y $|A \cdot A| = |A| \cdot |A| = a \cdot a = a^2$. Si tenemos el producto de A n veces, tenemos que $\left|\overbrace{A \cdot \ \dots \ \cdot A}^{n \ veces}\right| = \overbrace{|A| \cdot \dots \cdot |A|}^{n \ veces} = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \ veces} = a^n$.

Criterios de corrección:

- Calcular del determinante de A, 0,25 puntos; calcular el determinante de $A \cdot A$, 0,25 puntos; aplicar las propiedades del determinante para el cálculo de $|A^n|$, 0,5 puntos; calcular el determinante de A^n, 0,5 puntos.

5.

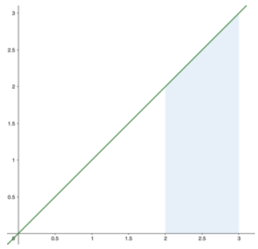
a) [**1 punto**] Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

b) [**1,5 puntos**] Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

$\pi_1 \equiv x + y = 1; \pi_2 \equiv x + y + z = 2; \pi_3 \equiv z = 0.$

Solución:

a) La región que gira viene dada por:



Así, el volumen viene dado por la expresión:

$$V = \int_2^3 \pi(x)^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \pi \left(\frac{27}{3} - \frac{8}{3}\right) = \pi \frac{19}{3}\ unidades^3.$$

<u>Criterios de corrección:</u>

- Plantear el cálculo del volumen, 0,5 puntos; resolver la integral definida, 0,25 puntos; dar el valor correcto del volumen, 0,25 puntos.

b) Para estudiar la posición relativa de esos tres planos podemos estudiar cómo son las soluciones del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x + y \quad\quad = 1 \\ x + y + z = 2 \\ \quad\quad\quad z = 0 \end{cases}.$$

Si consideramos la matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vemos que tiene dos columnas iguales, por lo que no puede tener rango 3 y $|M| = 0$. Es fácil ver que tiene rango 2 tomando, por ejemplo, el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Consideramos ahora el estudio del rango de la matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como las dos primeras columnas son iguales, todos los menores de orden 3 que las incluyan tendrán determinante 0. Así, tomamos $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 2 = -1 \neq 0$. Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema planteado sería incompatible.

Por tanto, los planos no se cortan ni en un punto ni en una recta. Veamos todos los pares de casos:

- π_1, π_2: Tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada del sistema definido por las dos ecuaciones tienen rango 2. Por tanto, los planos se cortan.
- π_1, π_3: Tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada del sistema definido por las dos ecuaciones tienen rango 2. Por tanto, los planos se cortan.
- π_2, π_3: Tanto la matriz de coeficientes como la matriz ampliada del sistema definido por las dos ecuaciones tienen rango 2. Por tanto, los planos se cortan.

Así, los planos se cortan dos a dos.

Criterios de corrección:

- Estudiar el rango de M, 0,25 puntos; estudiar el rango de M^*, 0,25 puntos; determinar que los tres planos no se cortan, 0,25 puntos; estudiar la relación entre cada par de planos, 0,25 por cada uno de los tres casos.

6.

a) [**1 punto**] Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b.1) [**0,75 puntos**] ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b.2) [**0,75 puntos**] Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

Solución:

a) Si resolvemos el límite directamente obtenemos:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x} = \frac{0}{0}.$$

Para eliminar la indeterminación podemos simplificar el cociente de los dos polinomios (puesto que el -2 es raíz de ambos) o aplicar la regla de L'Hôpital. Aplicando el primer método (por ejemplo) obtenemos:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x} = \lim_{x\to -2} \frac{x^2+1}{x} = \frac{5}{-2} = \frac{-5}{2}.$$

Criterios de corrección:

- Establecer la indeterminación, 0,25 puntos; plantear el método de resolución de la indeterminación, 0,25 puntos; ejecutar el método de resolución, 0,25; dar el valor correcto del límite, 0,25 puntos.

b) Sea V el suceso correspondiente a sacar una carta con un punto verde y el suceso R el correspondiente a sacar una carta con un punto rojo. Tenemos las siguientes probabilidades:

$$P(V) = \frac{4+7}{40} = \frac{11}{40};\ P(R) = \frac{5+7}{40} = \frac{12}{40}; P(V\cap R) = \frac{7}{40}.$$

b.1) Si hacemos dos extracciones sin reemplazamiento tendríamos:

$$P(VV) = \frac{11}{40}\cdot\frac{10}{39} = \frac{110}{1560}.$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide, 0,25 puntos; obtener $P(V)$, 0,25 puntos; calcular $P(VV)$, 0,25 puntos.

b.2) La probabilidad que se pide es

$$P(R \mid V) = \frac{P(R \cap V)}{P(V)} = \frac{7/40}{11/40} = \frac{7}{11}.$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide, 0,25 puntos; dar la regla de la probabilidad condicionada, 0,25 puntos; obtener correctamente $P(R \mid V)$, 0,25 puntos.

7.

a) [**1,25 puntos**] Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) [**1,25 puntos**] Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0,1,0)$.

Solución:

a) Aplicando las propiedades de los determinantes obtenemos:

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 + 0 = 2.$$

Criterios de corrección:

- Descomponer el determinante como suma de dos, 0,25 puntos; calcular el primero, 0,25 puntos; calcular el segundo, 0,25 puntos; dar el valor correcto del determinante, 0,5 puntos.

b) La recta tiene como vector director el vector $(1,1,-2)$. Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por $A(0,1,0)$ y es paralela a la recta dada es

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$$

Criterios de corrección:

- Determinar los elementos que definen la recta (punto y vector director), 0,25 puntos; cálculo del vector director 0,5 puntos; ecuación de la recta (en cualquiera de sus formas), 0,5 puntos.

8.

a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

n	k	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
5	0	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313

(p)

Solución:

a) Tenemos las siguientes probabilidades para seleccionar cada una de las cajas al tirar el dado:

$$P(A) = \frac{3}{6}; P(B) = \frac{2}{6}; P(C) = \frac{1}{6}$$

Además, las probabilidades de sacar una carta de copas de cada caja son:

$$P(\,copas \mid A\,) = \frac{3}{5}; P(\,copas \mid B\,) = \frac{2}{5}; P(\,copas \mid C\,) = \frac{1}{5}.$$

a.1) Así, la probabilidad de sacar una carta de copas es

$$P(copas) = P(copas \cap A) + P(copas \cap B) + P(copas \cap C) =$$
$$P(A) \cdot P(\,copas \mid A\,) + P(B) \cdot P(\,copas \mid B\,) + P(C) \cdot P(\,copas \mid C\,) =$$
$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{14}{30}$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,25 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

a.2) Para calcular esta probabilidad usaremos la regla de Bayes ya que la probabilidad que se pide es

$$P(\,B \mid copas\,) = \frac{P(B \cap copas)}{P(copas)} = \frac{P(B)P(copas \mid B)}{P(copas)} = \frac{4/30}{14/30} = \frac{4}{14}.$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,25 puntos; escribir la regla de la probabilidad condicionada correctamente, 0,25 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.

b) Sea X la variable aleatoria que mide el número de veces que cae el paracaidista novato en el punto correcto. Se trata de una binomial con $n = 5$ y probabilidad de éxito $p = 0{,}25$.

b.1) La probabilidad que se pide es $P(X = 2) = 0{,}2637$.

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,25 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.

b.2) La probabilidad que se pide es

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}2373 = 0{,}7627.$$

Criterios de corrección:

- Plantear la probabilidad que se pide correctamente, 0,5 puntos; obtener el valor correcto, 0,25 puntos.